

文章编号: 1000-7598-(2008) 05-1227-06

广义节点无网格法在土力学固结分析中的应用

栾茂田, 叶祥记, 杨 庆, 黎 勇

(大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室/土木水利学院岩土工程研究所, 大连 116024)

摘 要: 借鉴流形方法思想, 引入广义节点的概念, 对传统的无网格法进行了改进, 建立了可具有任意高阶多项式插值函数的广义节点无网格方法。与传统无网格方法相比, 广义节点无网格方法更具有一般性, 当选取 0 阶广义节点位移插值函数时便可得到传统的无网格法。结合土工固结问题, 通过推导建立了 Biot 固结方程的数值计算列式, 对静态固结问题进行数值计算, 通过对比分析验证了所建议方法的可行性。

关 键 词: 无网格法; 广义节点无网格法; 径向插值函数; Biot 固结理论

中图分类号: TU 45

文献标识码: A

Application of generalized-node-based meshfree method to consolidation analysis based on Biot's equations in soil mechanics

LUAN Mao-tian, YE Xiang-ji, YANG Qing, LI Yong

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Institute of Geotechnical Engineering, School of Civil and Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A new type of meshfree method is developed by incorporating the generalized node which is originated from manifold method with the conventional meshfree method. The proposed method is termed as the generalized-node-based meshfree method. The fundamental theory together with numerical formulations is presented. When the zero-order displacement interpolation function of the generalized node is chosen, the proposed method will be reduced to the conventional meshfree method. Based on Biot's consolidation equations, the numerical formulation for analysis of consolidation in soil mechanics are especially established by using the proposed method. The accuracy and rationality of the present analysis are verified by comparing the computational results with the solution obtained by FEM for an example.

Key words: meshfree method; generalized-node meshfree method; radial basis functions; Biot's theory of consolidation

1 引 言

近 30 年来, 滑粒子法(SPH)^[1]、扩散单元法(DEM)^[2]、无单元 Galerkin 法(EFGM)^[3]、再生核粒子法(RPKM)^[4]、自然单元法(NEM)^[5]和点插值法(PIM)^[6]等无网格法及其计算技术得到了迅速发展, 这些无网格法与基于网格的有限单元法、有限体积法之间的最大差别在于逼近函数的构造。在传统的基于网格的数值方法中, 试函数的构造依赖于网格, 而无网格法只需利用离散点处的特性构造试函数。

无网格法包括无网格逼近形函数及其导数的构造和偏微分控制方程的离散形式两个基本步骤,

其中一般采用移动最小二乘法(MLS)、再生核粒子法(Kernel-Based)及径向基函数法(RBF)等方法构造形函数, 同时, 通常也采用 Galerkin 加权余量法或者配置法等技术对控制方程进行离散, 建立其数值列式。由于径向基函数法(RBF)所构造的形函数具备插值特性, 能够方便地实现强制边界条件而无需进行特别处理, 本文采用 Galerkin 加权余量法建立控制方程的弱形式。

在石根华^[7]所发展的流形方法(manifold method)中, 针对广义节点提出了广义自由度、数学覆盖和物理覆盖。通过提高定义在覆盖的局部逼近函数即覆盖函数的阶数, 可有效地提高流形方法总体解的

收稿日期: 2006-06-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 10172022, No. 50579006)与教育部跨世纪优秀人才培养计划研究基金资助项目(教技函[1998]2 号)。

作者简介: 栾茂田, 男, 1962 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土力学基本理论、海洋土力学理论与实验技术、非线性土动力学理论与计算等方面的教学与科研工作。E-mail: mtluan@dlut.edu.cn

论文联系人: 叶祥记, 男, 1980 年生, 博士研究生, 从事岩土工程基本理论与数值分析、计算力学与工程科学计算等方面的研究。E-mail: xjyedut@163.com

逼近精度。梁国平^[8]采用流形方法的基本思想对传统流形方法进行改进,并且从数学上证明了这种改进的可行性。栾茂田和田荣^[9]通过在传统有限单元中引入广义节点的概念,建立了可具有任意高阶多项式插值函数的广义节点有限元方法。邵国建等^[10]对探讨了广义 4 节点等参元有限元的基本特性。

张延军等、王志亮和 Wang^[11-13]等分别应用无单元 Galerkin 法、径向插值基函数无单元法求解土力学中的固结问题。本文采用所发展的广义节点无网格方法求解固结问题,并与有限元法的比较分析,验证了所建议方法的有效性和可行性。

2 径向插值基函数法(RBF)

假定问题的求解域 Ω 用 N 个节点来离散,假设在某个计算点 $\mathbf{x}$ 的支持域 $\Omega_x \subseteq \Omega$ 内有 n 个节点 $\mathbf{x}_i$,则可利用下式得到场函数 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 的近似解为

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x}) a_i + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) b_j = [\mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}^T(\mathbf{x})] \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) &= [R_1(\mathbf{x}) \ R_2(\mathbf{x}) \ \cdots \ R_n(\mathbf{x})]; \\ \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) &= [p_1(\mathbf{x}) \ p_2(\mathbf{x}) \ \cdots \ p_m(\mathbf{x})]; \\ \mathbf{a}^T &= [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]; \\ \mathbf{b}^T &= [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $R_i(\mathbf{x})$ 与 $p_j(\mathbf{x})$ 分别为径向基函数(RBF)和完备基函数; a_i 和 b_j 为相应的系数。对于二维问题,当分别采用一次($m=3$)或二次($m=6$)多项式作为完备基函数时,则可得到线性基与二次基:

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y]; \quad \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ y^2] \quad (3)$$

数学上,径向基函数一般可以采用多重二次函数(multi quadrics)、指数函数(exponential function)或薄板样条函数(thin plate spline)等形式,这里采用如下的多重二次函数作为径向基函数(简称为 MQ-RBF):

$$R_i(r) = (r_i^2 + C^2)^q = [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + C^2]^q \quad (4)$$

式中: q 和 C 为 2 个形状参数,通常 $q=I/2$, $C>0$, I 为奇数,这里取 $I=1$ 。

为保证获得确定的逼近函数,式(1)中的多项式必须满足下列条件:

$$\sum_{i=1}^n p_j(\mathbf{x}_i) a_i = 0, \quad j=1, 2, \dots, m \quad (5)$$

将式(1)和式(5)联立写为下列矩阵形式:

$$\mathbf{U}_s = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_e \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_q & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U}_e &= [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n]^T; \\ \mathbf{R}_q &= \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \cdots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \cdots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \cdots & R_n(r_n) \end{bmatrix}; \\ \mathbf{P}_m &= \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_1(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_1(\mathbf{x}_n) \\ p_2(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_2(\mathbf{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(\mathbf{x}_1) & p_m(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}^T; \\ \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_q & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由式(4)可知, $R_i(r_j) = R_j(r_i)$, 则矩阵 $\mathbf{R}_q$ 是对称的,从而矩阵 $\mathbf{G}$ 也是对称的。由式(6)可解得

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{U}_s \quad (8)$$

进一步地经过凝聚可得

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_q^{-1} \mathbf{U}_e - \mathbf{R}_q^{-1} \mathbf{P}_m \mathbf{b} \quad (9)$$

将式(9)代入式(5),利用式(9),则可得

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}_b \mathbf{U}_e; \quad \mathbf{a} = \mathbf{S}_a \mathbf{U}_e \quad (10)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S}_b &= [\mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_q^{-1} \mathbf{P}_m]^{-1} \mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_q^{-1}; \\ \mathbf{S}_a &= \mathbf{R}_q^{-1} - \mathbf{R}_q^{-1} \mathbf{P}_m \mathbf{S}_b = \mathbf{R}_q^{-1} (1 - \mathbf{P}_m \mathbf{S}_b) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

将式(10)代入式(1)中得

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_a \ \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_b] \mathbf{U}_e = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_e \quad (12)$$

式中: $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})$ 称为形函数,即

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) = [\mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_a \ \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_b] = [\phi_1(\mathbf{x}) \ \phi_2(\mathbf{x}) \ \cdots \ \phi_n(\mathbf{x})] \quad (13)$$

由此场函数 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 的偏导数为

$$\mathbf{u}_{,l}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Phi}_{,l}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_e = [\mathbf{R}_{,l}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_a \ \mathbf{P}_{,l}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_b] \mathbf{U}_e \quad (14)$$

式中: $l=x, y$ 。

由上述推导可知, 形函数 $\Phi(\mathbf{x})$ 具备 δ 函数的属性, 满足单位分解特性, 于是

$$\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^n \phi_i(\mathbf{x}_j) = 1$$

3 广义节点无网格法(GNMF)

基于上述形函数, 场函数的逼近形式可表示为

$$\mathbf{u}^h(x, y) = \sum_i^n \phi_i(x, y) \mathbf{u}_i \quad (16)$$

式中: $\mathbf{u}_i = [u_i \ v_i]^T$ 为节点上的自由度向量, 相当于传统无网格法中的节点位移。在流形方法中, 每个广义节点可含有任意多个广义自由度。因此式(16)中的 $\mathbf{u}_i$ 可表示为 $2m_i$ 个广义自由度的函数:

$$\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \sum_j^{m_i} \begin{bmatrix} f_{ij}(x, y) & 0 \\ 0 & f_{ij}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i,2j-1} \\ d_{i,2j} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

将式(17)代入式(16), 则将流形方法中的广义节点概念与径向插值基函数技术相结合, 得到了一类新的无网格法的逼近函数表达式:

$$\mathbf{u}^h(x, y) = \sum_i^n \phi_i \sum_j^{m_i} \begin{bmatrix} f_{ij}(x, y) & 0 \\ 0 & f_{ij}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i,2j-1} \\ d_{i,2j} \end{Bmatrix} = \sum_i^n \phi_i \mathbf{F}_i \mathbf{D}_i = \sum_i^n \mathbf{N}_i \mathbf{D}_i \quad (18)$$

式中: $\mathbf{D}_i$ 为节点 i 的广义自由度向量, 即

$$\mathbf{D}_i = [d_{i,1} \ d_{i,2} \ \cdots \ d_{i,2m_i}]^T \quad (19)$$

这种具有多个自由度的节点称为广义节点; $\mathbf{N}_i$ 为广义插值函数矩阵, 与传统无网格法中的插值函数 ϕ_i 具有下列关系:

$$\mathbf{N}_i = \phi_i \sum_j^{m_i} \begin{bmatrix} f_{ij}(x, y) & 0 \\ 0 & f_{ij}(x, y) \end{bmatrix} = \phi_i \mathbf{F}_i \quad (20)$$

式中: $\mathbf{F}_i$ 为广义节点位移插值函数。进一步地, 式(17)经展开可写成下列形式:

$$\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{i1} & 0 & \cdots & f_{im_i} & 0 \\ 0 & f_{i1} & \cdots & 0 & f_{im_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \\ \vdots \\ d_{i,2m_i-1} \\ d_{i,2m_i} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

注意到, 0 阶的广义节点位移插值函数为

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则有}$$

$$\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

此时便退化为传统的无网格法。1 阶与 2 阶的广义节点位移插值函数分别为

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy & 0 & x^2 & 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy & 0 & x^2 & 0 & y^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

所对应的广义节点分别具有 6 个与 12 个自由度:

$$\mathbf{D}_i = [d_{i,1} \ d_{i,2} \ \cdots \ d_{i,6}]^T; \quad \mathbf{D}_i = [d_{i,1} \ d_{i,2} \ \cdots \ d_{i,12}]^T \quad (24)$$

由此推广可以获得高阶广义节点位移插值函数。由式(20)可知, 随着广义节点位移插值函数阶次的增多, 广义插值函数的阶次也得到提高。

4 Biot 固结理论无网格法计算列式

在平面应变条件下, 对于饱和土体的二维固结问题, 首先引入下列变量与算子,

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x \ \sigma_z \ \tau_{xz}]^T; \quad \boldsymbol{\sigma}' = [\sigma'_x \ \sigma'_z \ \tau'_{xz}]^T; \\ \mathbf{q} &= [q_x \ q_z]^T; \quad \mathbf{M} = [1 \ 1 \ 0]^T; \quad \mathbf{m} = [1 \ 1]; \\ \tilde{\mathbf{M}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}; \\ \mathbf{L} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ 0 & \cos\beta \\ \cos\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式中: α 与 β 分别为应力已知边界上外法线方向与 x 轴及 y 轴之间的夹角。

4.1 Biot 固结方程

混和体的平衡方程为

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (26)$$

土骨架的几何方程为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (27)$$

土骨架的物理方程为

$$d\sigma' = c d\varepsilon \quad (28)$$

孔隙水的物理方程即 Darcy 渗透定律为

$$q = \frac{1}{\gamma_w} k \tilde{L} \tilde{M} p \quad (29)$$

有效应力原理为

$$\sigma = \sigma' + M p \quad (30)$$

物质连续方程为

$$m k \tilde{L}^2 \tilde{M} M p + m \frac{\partial}{\partial t} \tilde{L} u = 0 \quad (31)$$

初始条件与边界条件：在位移已知边界 Γ_u 上和应力已知边界在 Γ_σ 上的边界条件分别为

$$u = \bar{u}; \quad n\sigma = \bar{t} \quad (32)$$

在孔隙水压力已知边界 Γ_p 上和流量已知边界 Γ_q 上的边界条件分别为

$$p = \bar{p}; \quad \frac{1}{\gamma_w} k \tilde{L} \tilde{M} p = \bar{q} \quad (33)$$

$t=0$ 时刻的初始条件为

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad p(x, 0) = p_0(x) \quad (34)$$

式 (28)~(33) 中： σ 、 σ' 、 p 分别为 t 时刻的总应力，有效应力和孔隙水压力； q 为孔隙水流量； k 为渗透系数矩阵； M 、 $\tilde{M}$ 与 m 为转换矩阵； L 、 $\tilde{L}$ 分别为算子矩阵； b 为体积力； γ_w 为水的重度； c 为土骨架弹性系数矩阵； $\bar{u}$ 为边界 Γ_u 上给定的位移； $\bar{p}$ 为边界 Γ_p 上的孔隙水压力； $\bar{q}$ 为边界 Γ_q 上孔隙水流量， $\bar{t}$ 为边界 Γ_σ 上的表面张力； n 为边界 Γ 法向量矩阵。

4.2 控制方程的数值列式

与混和体平衡方程、初始条件及边界条件相等价 Galerkin 弱形式为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta(Lu)^T (cLu + Mp) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \\ \int_{\Gamma_i} \delta u^T \bar{t} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta u^T (\tilde{M} M p^t) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

对于孔隙水压力，采用传统的径向插值基函数构造，其逼近函数为

$$p = \sum_{i=1}^n \phi_i p_i \quad (36)$$

将广义节点位移插值函数式 (18) 和孔隙水压力的径向插值基函数式 (36) 代入式 (35)，首先观察其中第 1 项中的两部分，

$$Lu^h = L \sum_i^n N_i D_i = L \sum_i^n \phi_i F_i D_i = \sum_i^n \bar{B}_i D_i =$$

$$\sum_i^n L \phi_i \begin{bmatrix} f_{i1} & 0 & f_{i2} & 0 & \cdots & f_{im_i} & 0 \\ 0 & f_{i1} & 0 & f_{i2} & \cdots & 0 & f_{im_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \\ \vdots \\ d_{i,2m_i-1} \\ d_{i,2m_i} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

式中： $\bar{B}_i = L N_i = L \phi_i F_i$ ，为计算点 x 在支持域内节点 i 的几何矩阵。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \left(\sum_i^n \bar{B}_i D_i \right)^T \left(c \sum_j^n \bar{B}_j D_j \right) d\Omega = \sum_i^n \sum_j^n \delta D_i^T K_{ij} D_j = \\ \sum_i^N \sum_j^N \delta D_i^T K_{ij} D_j = \delta D^T K D \end{aligned} \quad (38)$$

式中： $K_{ij} = \int_{\Omega} \bar{B}_i^T c \bar{B}_j d\Omega$ 为广义节点刚度矩阵。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \left(\sum_i^n \bar{B}_i D_i \right)^T \left(\sum_j^n \phi_j M p_j \right) d\Omega = \sum_i^n \sum_j^n \delta D_i^T \bar{K}_{ij} M p_j = \\ \sum_i^N \sum_j^N \delta D_i^T \bar{K}_{ij} M p_j = \delta D^T \bar{K} P \end{aligned} \quad (39)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{K}_{ij} = \int_{\Omega} \bar{B}_i^T \phi_j d\Omega; \\ P^T = [M^T p_1 \quad M^T p_2 \quad \cdots \quad M^T p_N] \end{aligned} \quad (40)$$

式 (35) 中左边第 2 项为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \left(\sum_i^n \phi_i F_i D_i \right)^T b d\Omega = \sum_i^n \delta D_i^T \int_{\Omega} (\phi_i F_i)^T b d\Omega = \\ \sum_i^n \delta D_i^T f_i^b = \delta D^T F^b \end{aligned} \quad (41)$$

式中： $f_i^b = \int_{\Omega} (\phi_i F_i)^T b d\Omega$ 为与体积力等效的广义节点力向量； F^b 为相应的总体等效广义节点力向量。

同理，对于式 (35) 中左边的第 3 项，可得到与边界外力相等效的广义节点力向量为

$$f_i^s = \int_{\Gamma_i} (\phi_i F_i)^T \bar{t} d\Gamma \quad (42)$$

在式 (35) 的第 4 项中， p^t 为由前期应力、节点孔压等效所得到的外荷载，相应的等效节点荷载向量为

$$f_i^t = \int_{\Omega} (\phi_i F_i)^T \tilde{M} M p_i^t d\Omega \quad (43)$$

总的等效广义节点应力为

$$\begin{aligned} f_i = f_i^b + f_i^s + f_i^t; \\ F^T = [f_1^T \quad f_2^T \quad \cdots \quad f_N^T] \end{aligned} \quad (44)$$

考虑到 $\delta \mathbf{D}$ 的任意性, 则平衡方程可写成下列矩阵形式:

$$\mathbf{K}\mathbf{D} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (45)$$

式中: $\mathbf{D}$ 为广义节点自由度向量。与物质连续方程式 (30) 相等价的 Galerkin 弱形式为

$$\int_{\Omega} (\delta p) (\mathbf{m} \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{u}) d\Omega + \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\gamma_w} \int_{\Omega} (\delta p) \mathbf{m} \mathbf{k} (\tilde{\mathbf{L}})^2 \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{M} p d\Omega dt = 0 \quad (46)$$

将广义节点位移插值函数式 (18) 与孔隙水压力的径向插值基函数式 (36) 代入式 (46), 则得到其中的第 1 项与第 2 项分别为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\delta p) (\mathbf{m} \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{u}) d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\delta \sum_i^n \phi_i p_i \right) \left(\mathbf{m} \tilde{\mathbf{L}} \left(\sum_j^n \mathbf{N}_j \mathbf{D}_j \right) \right) d\Omega = \\ &= \sum_i^n \sum_j^n \delta p_i \int_{\Omega} \phi_i \mathbf{m} \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{N}_j d\Omega \mathbf{D}_j = \sum_i^n \sum_j^n \delta p_i \mathbf{m} \bar{\mathbf{K}}_{ij}^T \mathbf{D}_j = \delta \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{D}; \\ \frac{1}{\gamma_w} \int_{\Omega} (\delta p) \mathbf{m} \mathbf{k} (\tilde{\mathbf{L}})^2 \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{M} p d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\delta \sum_i^n \phi_i p_i \right) \mathbf{m} \frac{\mathbf{k}}{\gamma_w} (\tilde{\mathbf{L}})^2 = \\ &= \tilde{\mathbf{M}} \left(\sum_j^n \phi_j \mathbf{M} p_j \right) d\Omega = \sum_i^n \sum_j^n \delta p_i \int_{\Omega} \mathbf{m} \frac{\mathbf{k}}{\gamma_w} \tilde{\mathbf{L}} \phi_i \tilde{\mathbf{L}} \phi_j \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{M} d\Omega \delta p_j = \\ &= \sum_i^n \sum_j^n \delta p_i \mathbf{m} \tilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{M} p_j = \delta \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P} \end{aligned} \quad (47)$$

式中: $\bar{\mathbf{P}} = [\mathbf{m} p_1 \quad \mathbf{m} p_2 \quad \cdots \quad \mathbf{m} p_N]$ 。考虑到 $\delta \bar{\mathbf{P}}$ 的任意性, 物质连续方程可写为

$$\bar{\mathbf{K}}^T \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{P} = 0 \quad (48)$$

采用有限差分法对式 (45) 进行关于时间的积分, 则有

$$\left. \begin{aligned} \theta \mathbf{K} \mathbf{D}_{t1} + \theta \bar{\mathbf{K}} \mathbf{P}_{t1} &= (\theta - 1) \mathbf{K} \mathbf{D}_{t0} + (\theta - 1) \bar{\mathbf{K}} \mathbf{P}_{t0} + \mathbf{F}; \\ \theta \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{D}_{t1} + \theta^2 \Delta t \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P}_{t1} &= \theta \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{D}_{t0} + \theta^2 \Delta t \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P}_{t0} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

式中: θ 为积分参数, $0 \leq \theta \leq 1$; Δt 为时间步长。联立求解方程 (49), 便可以确定饱和和孔隙介质的孔隙水压力与土骨架位移。

5 算例分析

如图 1 所示的条形基础下地基固结问题可以简化为二维平面应变问题处理, 已知地基土的泊松比 $\nu = 0.301$, 变形模量 $E = 30 \text{ MPa}$, 土层的渗透系数 $k_x = k_y = 1.782 \times 10^{-3} \text{ m/d}$, 底面为不透水边界, 条形基础上的均布外荷载 $q = 100 \text{ kPa}$ 。计算模型见图 1, 条形基础宽度为 4 m, 横向计算范围取为 24 m, 深度方向取为 16 m。

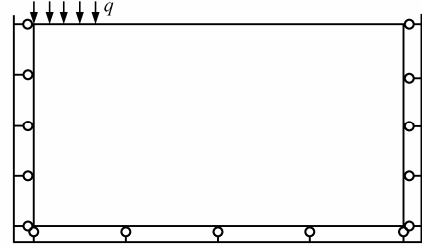


图 1 条形基础下地基固结模型

Fig.1 The plane-strain consolidation of strip foundation

无网格计算模型采用与有限元计算模型相同的节点数目, 在计算域中均匀地布置 15×21 个节点, 从而形成 14×20 个四边形单元。MQ-RBF 的形状参数分别取 $q = 0.5$, $C = 1.8$ 。对于基础中心线下深度为 5.7 m 的土体, 考查该点的超孔隙水压力的消散及其固结情况。这里分别采用 0 阶、1 阶的广义节点位移函数, 利用所建议的分析方法进行数值计算, 并与基于大型有限元分析软件 ABAQUS^[14] 的有限元解进行了比较, 如图 2 及图 3 所示。

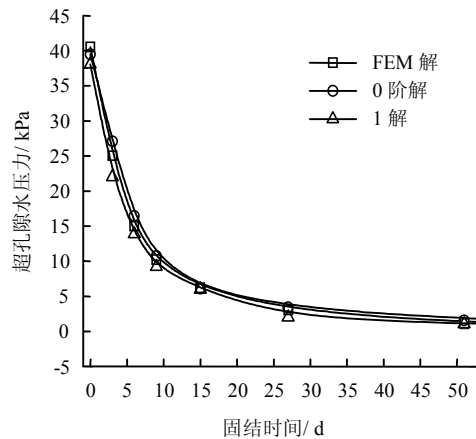


图 2 固结过程中超孔隙水压力随时间的消散

Fig.2 Dissipation of excess pore water pressure with time during consolidation

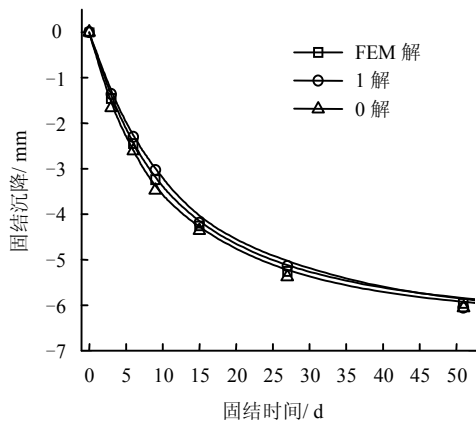


图 3 固结过程中沉降随时间的变化

Fig.3 Variation of settlement with time during consolidation

由图可见, 广义节点无网格法所得到的计算结果与有限元解吻合良好, 表明本文方法的可靠性。

6 结 语

广义节点无网格法借鉴流形方法思想, 引入广义节点的概念, 对传统的无网格法进行了改进, 建立了可具有任意高阶多项式插值函数的广义节点无网格方法。选取高阶的广义节点插值函数可以提高插值精度。又由于采用 RBF 来构造形函数, 具备插值特性而不需要额外处理边界条件。同时由于以 Galerkin 方法所构造的控制方程弱形式为基础建立系统的数值离散列式, 因此仍需对问题求解域划分背景网格进行能量积分, 还不是真正的无网格法。本文将发展的广义节点无网格法应用于求解土力学中的固结问题, 验证该方法的可行性, 作为新一类的无网格法, 对于许多工程问题具有广阔的应用前景。

参 考 文 献

- [1] GINGOLD R A, MONAGHAN J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and applications to non-spherical stars[J]. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, 1977, 181: 375—389.
- [2] NAYROLES B, TOUZOT G, VILLON P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements[J]. **Computational Mechanics**, 1992, 10: 307—318.
- [3] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element free Galerkin methods[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1994, 37: 229—256.
- [4] LIU W K, JUN S, ZHANG Y F. Reproducing kernel particle methods[J]. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 1995, 20: 1 081—1 106.
- [5] SUKUMAR N, MORAN B, BELYTSCHKO T. The nature element method in solid mechanics[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1998, 43: 839—887.
- [6] LIU G R, GU Y T. A point interpolation method for two dimensional solids[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2001, 50: 937—951.
- [7] 石根华. 数值流形方法与非连续变形[M]. 裴觉民译. 北京: 清华大学出版社, 1997.
- [8] 梁国平, 何江衡. 广义有限元空间——一类新的逼近空间[J]. **力学进展**, 1995, 25(4): 562—565.
LIANG Guo-ping, HE Jiang-heng. Generalized finite element method——a new finite element space[J]. **Advances in Mechanics**, 1995, 25(4): 562—565.
- [9] 栾茂田, 田荣, 杨庆. 广义节点有限元[J]. **计算力学学报**, 2000, 17(2):192—200.
LUAN Mao-tian, TIAN Rong, YANG Qing. Generalized-node finite element method based on manifold concept[J]. **Chinese Journal of Computational Mechanics**, 2000, 17(2):192—200.
- [10] 邵国建, 刘体锋. 广义有限元及其应用[J]. **河海大学学报(自然科学版)**, 2002, 30(4):28—31.
SHAO Guo-jian, LIU Ti-feng. Generalized finite element method and its application[J]. **Journal of Hohai University(Nature Sciences Version)**, 2002, 30(4): 28—31.
- [11] 张延军, 肖树芳. 无单元法(EFGM)——在岩土工程上有限元法的有力补充[J]. **计算力学学报**, 2003, 20(2): 179—183.
ZHANG Yan-jun, XIAO Shu-fang. Element-free Galerkin method—powerful complement of finite element method in geotechnical engineering[J]. **Chinese Journal of Computational Mechanics**, 2003, 20(2): 179—183.
- [12] 王志亮. 无单元伽辽金法解固结问题[J]. **岩石力学与工程学报**, 2004, 23(7): 1 141—1 145.
WANG Zhi-liang. Element-free Galerkin method for solving Biot consolidation problem[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(7): 1 141—1 145.
- [13] WANG J G, LIU G R, LIN P. Numerical analysis of Biot's consolidation process by radial point interpolation method[J]. **International Journal fo solids and Structures**, 2002, 39: 1 557—1 573.
- [14] HIBBIT Karlson, Sorrenson. ABAQUS User's Manual (Version 6.3)[M]. USA: Pawtucket, 2002.